第 26 卷 第 3 期　低　温　物　理　学　报　Vol.26，No.3
2004 年 8 月　CHINESE JOURNAL OF LOW TEMPERATURE PHYSICS　Aug.，2004

London 两个方程等价性与临界态形成动力学

韩永胜[1,2]　陈　曙[1]　杨宏新[1]

[1] 中国药科大学、基础科学部，南京　210009

[2] 南京大学物理系、固体微结构实验室，南京　210093

C. P. Bean 基于 K. Mendelssohn 海绵模型建立了非理想 Ⅱ 类超导体临界态理论，从而形成了硬超导体电磁理论的重要基础之一. 然而近年来基于涡旋动力学理论的发展，逐步形成了临界态动力学研究课题. 涡旋运动导致宏观波函数的相滑移，和局域的 Joule 热等强烈非线性效应是形成自组织临界态物理基础. 根据实验观测，磁通进入样品的前锋为线性分布，但其解析理论还在发展中. 本文论述了在超导体的零电阻和完全抗磁性的实验基础上建立起来的 London 第一和第二方程本质上的等价性，并结合 London 理论与 Anderson 磁通热激活理论讨论了临界态形成动力学，给出了 Slab 样品中的电场、电流和磁通密度分布，定量解释了实验观察到的现象.

关键词：Bean 模型，Slab 样品，涡旋动力学，磁通密度分布

PACC： 7420M，7420D

1 引　　言

在超导体的零电阻和完全抗磁性的实验基础上建立起来的 London 理论是超导电磁学理论的基础，London 理论以及在其基础上改进后的 Pippard 理论和 Ginzburg-Landau 理论共同构成了解释 Ⅱ 类超导体一系列重要性质的唯象理论. 就 London 理论中的 London 第一和第二方程的本质而言，它们是等价的[1]，在其等价性基础上可推论出描述 Ⅱ 类超导体临界态的 Bean 模型[2]的合理性.

上世纪 40 年代，C.P. Bean[2]基于 K. Mendelssohn[3]海绵模型建立了非理想 Ⅱ 类超导体临界态理论，从而形成了硬超导体电磁理论的重要基础之一. 近年来超导临界态动力学的研究取得了重要的进展[4~11]. 磁通穿入超导体是一个复杂的过程，开始时，由于表面势垒的阻碍，穿透深度内形成的磁通线无法进入超导体；当外场超过起始穿透场时，磁通开始以一定的速度在超导体中跳跃运动. 根据 Barteen-Stephen[12]的磁通运动理论，磁通涡旋的中心将感应出电场，因而会在超导体中产生局域的 Joule 热，这会导致超导体的一系列不稳定性的产生，如枝晶结构[4,7]和磁崩效应[5,6,10]. 磁通在外场的驱动下在超导体中的运动将导致能量的耗散，在外场的磁压差和超导体内的钉扎中心相互作用下，磁通的这种运动将会达到一

收稿日期：2004-04-05

种自组织的临界态.Blatter 等[13]分析了 Slab 超导体的这个非平衡态过程，他们指出：这种磁通的自组织效应是磁通扩散方程的强烈非线性所导致的，而磁通在超导体中的线性分布是其实际分布一个好的近似描述，在某种程度上是符合 Bean 临界态模型的.最近，对块状 MgB_2 样品的磁光研究表明，超导电流在样品中的分布是均匀的[14~17]，这也是符合 Bean 临界态模型的.在本篇文章中，我们根据 Maxwell 方程和 London 方程，给出了电场、电流和磁通在 Slab 超导体中分布的解析形式，论证了 Bean 模型的合理性.

2 理论基础

我们首先从 Maxwell 方程推导出电流密度（$\boldsymbol{J}$）和电场强度（$\boldsymbol{E}$）之间的关系，由 Maxwell 方程

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B}$$

我们将 ∇ 算符同时作用于上述方程得

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\partial_t (\nabla \times \boldsymbol{B}) = -\mu_0 \partial_t (\boldsymbol{J})$$

而

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E}$$

故

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu_0 \partial_t (\boldsymbol{J}) \tag{1}$$

方程（1）就是超导体中电场强度和电流密度之间的关系，也是我们以下讨论的出发点.

另外我们发现 London 第一方程和第二方程并不是独立的，由第一方程可以导出第二方程.由 London 第一方程

$$\nabla \times \boldsymbol{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \boldsymbol{B}$$

我们将上述方程两边对时间求偏导，并考虑 Maxwell 方程得

$$\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \nabla \times \boldsymbol{E}$$

也就是说

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \boldsymbol{E} + C$$

其中 C 是一个与时间无关的常数，由方程（1）知：$\boldsymbol{E} = 0$ 时，$\partial_t (\boldsymbol{J}) = 0$，故 $C = 0$.这样，我们就得到了 London 第二方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \boldsymbol{E} \tag{2}$$

London 第二方程本来是从 Newton 第二定律推导出来的，不能用来研究一般的电磁场问题，但是从我们上述的推导来看，我们发现 London 第二方程也可以用来研究一般的电磁感应问题.实际上 J. Bardeen，M. J. Stephen 已早这样用了[12]，不过他们没有说明.由方程（1）和方程（2）我们得到超导电磁感应的电场分布方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{\lambda^2} \boldsymbol{E} \tag{3}$$

3 解析讨论

下面我们将上述方程应用于一个超导 Slab 样品,该样品沿 y 轴方向的宽度为 $2d$,沿 x 和 z 轴方向的线度为无限大.将直角坐标系的原点定在样品的中心,y 轴方向垂直于样品的表面.给样品加一个平行于其表面的磁场,方向平行于 z 轴.显然,样品中的磁场(B)平行于 z 轴,电场(E)和电流密度(J)均平行于 x 轴,磁通线在超导体中的跳跃速度(ν)也平行于 x 轴.由对称性分析得,$B(y,t)$是一个关于 y 的偶函数,而 $E(y,t)$和 $J(y,t)$以及 ν 均是关于 y 的奇函数.因此我们只要考虑 $0\leq y\leq d$ 的区域内的分布即可.磁通线在超导体中的运动可以由以下方程来描述

$$E = B\nu = B\nu L$$

$$\nu = \nu_0\exp(-U_{\mathrm{eff}}/kT)$$

在样品边界因外场一定,因而有[13]

$$U_{\mathrm{eff}} = kT\ln\left(1+\frac{t}{t_{\mathrm{eff}}}\right)$$

其中 ν 是磁通线跳跃的频率,L 为相邻磁通线间的距离,U_{eff} 为有效钉扎势,$t_{\mathrm{eff}} = kTd^2/(8\nu_0 H\partial U_{\mathrm{eff}}/\partial J)$.这样方程(3)在一维情况下表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2E(y)}{\mathrm{d}y^2} = \frac{1}{\lambda^2}E(y)$$

在边界上,电场分布满足的条件为

$$E(\pm d) = \pm\nu LB_0 = \pm\nu_0 L\mu_0 H_0\exp(-U_{\mathrm{eff}}/kT) = \pm\nu_0 L\mu_0 H_0\left(1+\frac{t}{t_{\mathrm{eff}}}\right)^{-1}$$

如果令 $E_0=\nu_0 L\mu_0 H_0$,则电场分布的解析解为

$$E = E_0\frac{\sinh(y/\lambda)}{\sinh(d/\lambda)}\left(1+\frac{t}{t_{\mathrm{eff}}}\right)^{-1} \tag{4}$$

同样我们可以分析电流的分布,由于$\partial J/\partial t<0$,故方程(2)可表示为

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0\lambda^2}E$$

积分该方程得

$$J = J_0 - \frac{E_0 t_{\mathrm{eff}}}{\mu_0\lambda^2}\cdot\frac{\sinh(y/\lambda)}{\sinh(d/\lambda)}\cdot\ln\left(\frac{t+t_{\mathrm{eff}}}{t_0+t_{\mathrm{eff}}}\right) \tag{5}$$

其中 t_0 为当 $t=t_0$ 时,$y=d$ 处,$J=J_0$.

由 Maxwell 方程 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$ 和电流分布方程(5),我们可以得到磁场分布方程,在一维情况下,Maxwell 方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}y} = \mu_0 J$$

则积分后可得

$$B = \mu_0 J_0 y + B_0 - \mu_0 J_0 d + \frac{E_0 t_{\mathrm{eff}}}{\lambda}\cdot\coth(d/\lambda)\cdot\left[1-\frac{\cosh(y/d)}{\cosh(d/\lambda)}\right]\cdot\ln\left(\frac{t+t_{\mathrm{eff}}}{t_0+t_{\mathrm{eff}}}\right) \tag{6}$$

由于 $B_0 - \mu_0 J_0 d + \frac{E_0 t_{eff}}{\lambda} \cdot \coth(d/\lambda) \cdot \left[1 - \frac{\cosh(y/d)}{\cosh(d/\lambda)}\right] \cdot \ln\left(\frac{t + t_{eff}}{t_0 + t_{eff}}\right) \sim 0$，因此，我们有理由认为，Slab 超导体中的磁场分布是满足线性分布的. 我们若取 $\nu_0 L = 10^{-3}$ m/s，$B_0 = \mu_0 H_0 = 10^{-3}$T，$t_0 = 10^6$s，$t_{eff} = 10^{-6}$s，$d = \lambda = 10^{-6}$m，根据式(4)，(5)，(6)作出电场、电流、和磁场分布如图(1)，(2)，(3)所示.

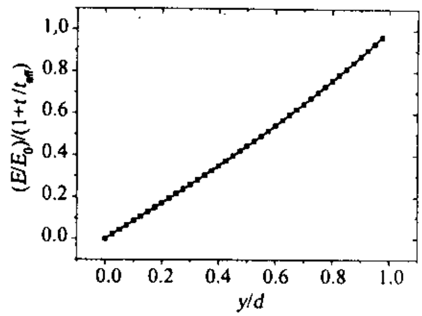

图 1　电场在 Slab 样品中的分布

4 结　　论

我们根据 Maxwell 方程和 London 第一方程导出了 London 第二方程，说明了 London 第二方程在电磁领域也是适用的 ;同时给出了电场、电流和磁场在 Slab 样品中的分布，指出磁通前锋在超导体中穿透时，是满足线性分布的，指出了 Bean 模型的合理性.

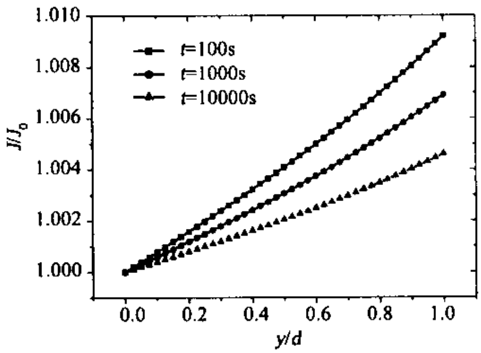

图 2　电流在 Slab 样品中的分布

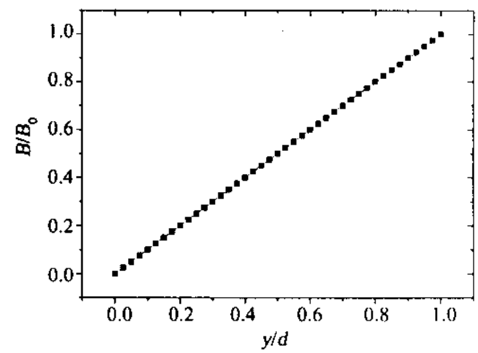

图 3　磁通在 Slab 样品中的分布

[1] 李正中，固体理论，高等教育出版社，1985.
[2] C. P. Bean，*Rev. Mod. Phys.*，**36**(1964)，31.
[3] K. Mendelssohn，*Proc. Roy. Soc.*，(London) A**152**(1935)，34.
[4] Igor Aranson，Alex Gurevich，and Valerii Vinokur，*Phys. Rev. Lett.*，**87**(2001)，67003.
[5] W. Barford，*Phys. Rev. B.*，**56**(1997)，425.
[6] W. Barfort，W. H. Beere，and M. Steer，*J. Phys.*，**5**(1993)，L333.
[7] A. V. Bobyl，D. V. Shantsev，T. H. Johansen，W. N. Kang，H. J. Kim，E. M. Choi，and S. I. Lee，*Appl. Phys. Lett.*，**80**(2002)，4588.
[8] R. G. Mints，A. L. Rakhmanov，*Rev. Mod. Phys.*，**53**(1981)，551.
[9] R. G. Mints，E. H. Brandt，*Phys. Rev.*，B**61**(2000)，11700.
[10] V. Vlasko-Vlasov，U. Welp，V. Metlushko and G. W. Crabtree，*Physica C*，**341～348**(2000)，1281.
[11] Y. S. Cha，*Physica C*，**330**(2000)，1.
[12] J. Bardeen，M. J. Stephen，*Phys. Rev.*，**140**(1965)，A1197.
[13] G. Blatter，M. V. Feigel'man，V. B. Geshkenbein，A. I. Larkin，V. M. Vinokur，*Rev. Mod. Phys.*，**66**(1994)，1152.

[14] R. Gerbaldo, G. Ghigo, G. Giunchi, L. Gozzelino F. Laviano, E. Mezzetti, *EUR PHYS J*, B**26**(3)(2002), 297 ~ 300.
[15] A. A. Polyanskii, A. Gurevich, J. Jiang, D. C. Larbalestier, S. L. Bud'ko, D. K. Finnemore, G. Lapertot and P. C. Canfield, *Supercond. Sci. Technol.*, **14**(2001), 811.
[16] 李仲,朱劲松,田伟,王业宁,《低温物理学报》, **21**(1999), 261.
[17] 徐小农,卢定伟,金新,《低温物理学报》, **24**(2002), 260.

EQUIVALENCE OF LONDON'S EQUATIONS AND DISCUSSION ABOUT CRITICAL STATE BEAN MODEL

HAN YONG-SHENG [1,2] CHEN SHU [1] YANG HONG-XIN [1]
[1] *Department of Fundamental Science, China Pharmaceutical University, Nanjing* 210009
[2] *Department of Physics and National Laboratory of Solid State Microstructure, Nanjing University, Nanjing* 210093
(Received 5 April, 2004)

Near 40 years ago, Bean established the remarkable critical state theory of the hard superconductors based on the K. Mendelssohn sponge model. This theory became the fundamental theory for the hard superconductor electromagnetic properties. Recently, the study of the critical state dynamics has achieved great advance based on the development of vortex dynamics. The basis of Self-organized criticality physics is the strong nonlinear effects, such as local Joule heat and vortex motion which leads to the phase sliding of macro wave function. Some experiments illustrate that the flux front is linear distribution as the flux penetrates into the superconductor. Its analytic interpretation is under development. In this article, we deal with this subject based on London's theory and Anderson's flux motion model, and illustrate the electrical field distribution, current density and magnetic field distribution in the sample.

Keywords: Bean model, Slab sample, vortex Dynamic, flux density distribution
PACC: 7420M, 7420D