也谈“十字相乘法”

—— 新加坡教材中的十字相乘法介绍及思考

杨慧娟　邢　蓉　李明兰

(青岛大学师范学院数学系)

分解因式历来是初中数学教学的一个非常重要的知识点，它贯穿于初等数学与高等数学，可以说是数学的纽带之一，因而因式分解的方法就成了中学数学教学的重要内容之一. 在《全日制义务教育数学课程标准》中删除了十字相乘法的教学，笔者与文[1]的作者颇有同感.

近日笔者见到新加坡2000年出版发行的新教材《New Mathematics Count》，这部教材中详细讲授了十字相乘法，而且给出了大量的练习题，下面笔者想对《New Mathematics Count》中关于十字相乘法的讲授内容及方式作一介绍.

1　介绍

《New Mathematics Count》，在提公因式法与分组分解法之后，教材详细讲授了用十字相乘法分解因式，下面是几个教材例题.

Example 1

Factorise $2x^2+7x+3$

Solution

Step 1

Determine the possible factors of the terms in x^2 and also those of the constant term.

$$\underset{\uparrow}{2x^2}+7x+\underset{\uparrow}{3}$$

$x\times 2x$　　$(+1)\times(+3)$

Step 2

Write the factors vertically as shown

x	$+1$	
$2x$	$+3$	

$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i>n$;

P 点在 OG 为直径的圆内 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{GP}<0\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i<n$.

定理证毕.

推论1　设 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 是⊙O的内接正n边形，P是⊙O内任意一点，$A_iB_i(i=1,2,\cdots,)$ 是过 P 点的弦，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{A_iP}{PB_i}\geqslant n$

如果我们定义坐标为 $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i,\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i,\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i\right)$ 的点 G 为顶点在球面上的封闭折线的重心，那么定理1就可推广到球内接闭折线，于是有，

推论2　四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球球心为 O，重心为 G，P 为球内一点，$A_iB_i(i=1,2,3,4)$ 为过 P 点的球 O 的弦，则

(1) P 在以 OG 为直径的球面上 $\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{A_iP}{PB_i}=4$

(2) P 在以 OG 为直径的球面外 $\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{A_iP}{PB_i}>4$

(3) P 在以 OG 为直径的球面内 $\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{A_iP}{PB_i}<4$

推论3　P 是正 n 面体 $A_1A_2A_3\cdots A_n(n=4,6,8,12,20)$ 外接球 O 内任意一点，A_iB_i 是过点 P 的球 O 的弦，则

$$\frac{A_1P}{PB_1}+\frac{A_2P}{PB_2}+\cdots+\frac{A_nP}{PB_n}\geqslant n.$$

参考文献

1　孙哲. 从三角形外心谈起. 中学数学，2004.3

Step 3

Cross-multiply the factors and write the product in the last column

$$\begin{array}{cc|c} x & +1 & 2x \\ 2x & +3 & 3x \\ \hline & & \end{array}$$

Step 4

Add the last column. Reject the work if the sum is not equal to the term in x in the given expression.

$$\begin{array}{cc|l} x & +1 & \left.\begin{array}{l}2x \\ 3x\end{array}\right\} Add \\ 2x & +3 & \\ \hline & & 5x \neq 7x \\ & & \text{所以 rejected} \end{array}$$

Step 5

Exchange place for 1 and 3. Cross-multiply and add the last column again.

$$\begin{array}{cc|c} x & +3 & 6x \\ 2x & +1 & x \\ \hline & & 7x \end{array} \qquad \text{Accepted}$$

Step 6

As Step 5 is accepted, the factors of the quadratic expression are those "circled"

$$\begin{array}{cc|c} x & +3 & 6x \\ 2x & +1 & x \\ \hline & & 7x \end{array}$$

所以 $2x^2+7x+3=(x+3)(2x+1)$

这是一个最简单的二次项系数为 2、一次项系数与常数项都为正数的能够运用十字相乘法进行因式分解的多项式，教材分六步给出了非常详细的思考过程，有助于学生从零开始掌握这种分解因式的方法．教材并没有从二次项为 1 的开始，这是与我国传统教材不同的一点．

Example 2

Factorise　$a^2+11a+30$

Solution

$$\begin{array}{ll} a^2+11a & +30 \\ \uparrow & \uparrow \\ a\times a & 1\times 30 \ or\ 2\times 15 \ or\ 5\times 6 \ or\ 3\times 10 \end{array}$$

1st Trial

$$\begin{array}{cc|c} a & 1 & a \\ a & 30 & 30a \\ \hline & & 31a \neq 11a \end{array}$$

2nd Trial

$$\begin{array}{cc|c} a & 2 & 2a \\ a & 15 & 15a \\ \hline & & 17a \neq 11a \end{array}$$

3rd Trial

$$\begin{array}{cc|c} a & 5 & 5a \\ a & 6 & 6a \\ \hline & & 11a \end{array}$$

所以 $a^2+11a+30=(a+5)(a+6)$

这个例题与上个例题相比，思考的过程简化了，但是这个例题却给出了一个详细的"试误"的过程，以说明如何分解常数项才能得到正确答案，这个"试误"的过程实际上就是思维的暴露过程，从建构主义的角度来讲，"试误"会使正确的反应不断加强，从而学生遇到问题就会有"灵感"，这种答案的出现方式在我国的教材中是比较少的．

Example 3

Factorise　$y^2-8y+12$

$$\begin{array}{ll} y^2-8y & +12 \\ \uparrow & \uparrow \\ y\times y & 2\times 6 \ or\ (-2)\times(-6),\ etc \end{array}$$

1st Trial

$$\begin{array}{cc|c} y & 2 & 2y \\ y & 6 & 6y \\ \hline & & 8y \neq -8y \end{array}$$

2nd Trial

$$\begin{array}{cc|c} y & -2 & -2y \\ y & -6 & -6y \\ \hline & & -8y \end{array}$$

所以 $y^2-8y+12=(y-2)(y-6)$

这个例题较上两个例题，难度上稍有增加，一次项系数由正数转化为负数，而且也给出了一个“试误”的思考过程．

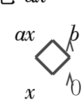
以上几个案例循序渐进地讲授了十字相乘法，步骤之详细，是我们以前的教材所不及的，另外我们也注意到，“试误”是讲授十字相乘法的特色．教材中还给出了常数项为负数的例子，在这一节的最后，《New Mathematics Count》给出了大量的练习题(练习题多是本教材的一个特点，不仅在这一节如此，其他章节都是如此)，以便让学生巩固掌握，练习题中也出现了二元二次齐次多项式的分解．

2 我们的思考

文[1]对于《标准》的修订带来新的启示，即在新教材中该如何处理十字相乘法，而《New Mathematics Count》中这样处理十字相乘法则不能不引起我们的思考．关于十字相乘法的意义，文[1]中已经有一些论述，在此笔者想从更广泛的角度对十字相乘法的教学意义做一探讨．

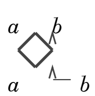
2.1 我们经常说，相对于提公因式与公式法而言，十字相乘法是“凑”出来的，正如文[1]所言，十字相乘法不如提公因式法、运用公式法机械，表现了更多的思维的开放性，灵活性．而笔者以为，这种“凑”的过程与多变性的过程，实际上含有很多直觉与猜想的成分，数学直觉思维与数学猜想是数学发现中极其重要的成分，《标准》允许并提倡在数学教学中锻炼学生的直觉思维与猜想能力，所以从这个角度来看，十字相乘法对于学生直觉思维与猜想能力的培养也具有一定的作用．

2.2 说十字相乘法“应用面很窄，能应用的情况大都是人为设计的，实在算不得一种通用的方法”，笔者也以为有些不妥，原因如下：第一，对于简单的提公因式可以分解的多项式，如 $ax^2+bx=x(ax+b)$，我们可以把 ax^2+bx 看作 ax^2+bx+0，则运用十字相乘法即为



．

第二，对于平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a+b)$，则可以把 a^2-b^2 看作 a^2+0-b^2，运用十字相乘法即为



．

完全平方公式用十字相乘法来解决也非常明显，读者可参见文[1]．第三，三元二次齐次多项式 $ax^2+bxy+cy^2$ 和二元二次多项式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 以及二元二次齐次多项式 $ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2$ 都可以用十字相乘法加以分解，具体可见文献[3]，笔者在此不再赘述．所以说十字相乘法应是一种比较通用的方法，完全平方公式与平方差公式“事实上是十字相乘法的特例”[1]．

2.3 从数学知识的纵向联系而言．用十字相乘法分解因式在后面解一元二次方程中具有举足轻重的作用．而在掌握了一元二次方程根与系数的关系以后，再看十字相乘法或许就不仅是一种简单的通过拼凑分解因式的方法了．另外这种交叉相乘的思想在高等代数的行列式部分也有很重要的意义．

2.4 从数学作为工具的角度而言，如果不要求学生熟练掌握灵活运用，至少也应该让学生了解还有这样一种对于某些一元二次多项式的因式分解非常有效的方法．或者说，作为一种数学文化，也应该让学生去了解它，继承它．另外我们也可以看到十字相乘法的思想在其他学科中的运用，如在化学的浓度配制问题中，十字相乘法就是一种非常有效的方法．

数学知识以及它的思想方法是先辈留给我们一份宝贵的通用的国际文化，而不应该因为地域或民族的不同出现太多的差异．同为亚洲的两个相距并非很远的国家对于十字相乘法到底该讲还是不该讲，讲到什么程度或许还应该是我们思考的问题．

参考文献

1 邝孔秀．“十字相乘法”该删吗？数学通报[J]2001，10

2 Tay Choon Hong，Mark Ridding，Martin Grier 《New Mathematics Count》．Singapore，2001

3 王文才，施佳芬．数学小辞典．科学技术文献出出版社，1983，2，P209－210

4 中华人民共和国教育部．全日制义务教育数学课程标准(实验稿)[S]．北京：北京师范大学出版社．2001

5 郑毓信，梁贯成．认知科学 建构主义与数学教育[M]．上海：上海教育出版社，1998，10