

中国与新加坡高中数学教材微积分 内容比较研究^①

高雪芬^{1,2}

(1. 华东师范大学数学系 200241 2. 浙江理工大学理学院 310018)

目前,微积分是近年来高中数学教材中变化比较多的内容.高中微积分的教学既关乎于高中毕业生对微积分基本思想方法的理解应用也关乎于高中与大学间的衔接问题.自20世纪90年代中期以来,作为一个只有四百多万人口的小国,新加坡的数学教育因其在国际数学与科学教育调查(TIMSS)中的成绩而备受国际数学教育界的关注,另一方面,中国和新加坡同属东方文化系统,其文化背景、教育制度都有一定的相似程度,所以我们选择新加坡高中教材作为比较对象,以期对我国的微积分教材改革有所启示.

1 概况

新加坡学制为小学六年、中学四到五年,高中两到三年(初级学院两年、高级中学三年).高中结束后,学生可参加A水准的考试.2006年起,新加坡教育部联合剑桥大学考试中心和新加坡考试评估局发布了新的A水准教学大纲.新的教学大纲

分为H1课程大纲、H2课程大纲和H3课程大纲,其中H1课程内容相当于H2课程的一半,深度与H2课程相当;H3课程为高级深化课程,为学有余力或希望能在某个领域深入学习的学生开设^[1].新加坡对高中教科书没有统一编制,而是由各个出版社或学校根据教学大纲自行编制.本研究所选用的教科书为新加坡EPB Pan Pacific出版的《H2 Mathematics (For A Level) Volume 1》^[2]简记为《新加坡H2(1)》和人教社A版的高中数学教材《数学(选修2-2)》^[3].

2 知识结构与内容比较

从篇幅上看,中国的教材是67页,新加坡的教材是102页.从知识结构来看,新加坡的教材要比我国的内容更丰富,其中麦克劳林级数、不定积分、微分方程是我国教材所没有的.具体请看表1.

表1 知识结构内容比较

主题	中国	新加坡
导数	变化率与导数的概念、导数的四则运算、导数在研究函数中的应用(单调性、极值、生活中的优化问题)	导数的概念、导数的四则运算、链式法则、隐函数求导、参数方程求导、导数应用(单调性、凹凸性、切线法线、变化率、最值问题)
麦克劳林级数	无	对于光滑函数的多项式逼近
不定积分	无	有理函数积分、三角函数积分、无理函数积分、换元积分、分部积分
积分	定积分的概念、微积分基本定理、面积、变速直线运动的路程、变力作功	定积分的概念、微积分基本定理、面积、旋转体体积
微分方程	无	一阶微分方程、二阶微分方程、解的曲线

^① 基金项目:全国教育科学规划2011年度教育部重点课题——大学与高中衔接中的学习困难及解决策略研究(DIA110251);国家社会科学基金十一五规划2010年度教育学重点课题:主要国家高中数学教材比较研究(ADA100009).

2.1 导数部分

中国的教材中主要是多项式函数和 $\sin x$ 等基本初等函数的求导问题. 新加坡教材中还包括复合函数、隐函数等求导方法、高阶导数、切线与法线的求法, 而这些中国都没有. 不过, 新加坡导数公式表中只有 e^x 和 $\ln x$ 的导数, 而中国的还包括了 a^x 和 $\log_a x$.

2.2 麦克劳林级数

新加坡教材中给出了6个例题, 详细地推导了一些函数的3阶或4阶展开式. 其中“例2”如下:

(1) 展开函数 $(1+x)^n$ 的麦克劳林级数的前三项.

(2) 如果 $x = \frac{1}{4}$, 选取合适的 n 来求 $\sqrt{5}$ 的近似值.

(3) 找出另一对能够求出 $\sqrt{5}$ 近似值的 n 和 x .

(4) 当 $x=4$, $n=\frac{1}{2}$ 时, 是否能够很好地求出 $\sqrt{5}$ 的近似值? 为什么?

这是一个开放题, 并且要求学生能够阐述自己的观点. 通过这个例题说明了麦克劳林级数在用作近似计算时的局限性 (x 越接近于 0, 近似程度越好). 此外, 在第二小节中, 还列举了三角函数的等价无穷小, 并介绍了几个简单的例题.

2.3 积分

新加坡教材在积分表中就直接给出了 $\int (ax + b) dx$, $\int \frac{1}{1+x^2} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$, $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx$, 后面还介绍了三角函数积分、无理函数积分、换元积分、分部积分等. 而中国没有不定积分的内容,

也没有换元积分法和分部积分法及一些特殊函数的积分方法, 关于定积分也大多局限于计算基本初等函数的定积分值. 在定积分的应用方面, 中国介绍了物理应用, 而新加坡没有, 但是新加坡教材中有旋转体的体积.

2.4 微分方程

这一部分在新加坡教材中的篇幅很小, 只有7页. 主要介绍了可分离变量的、线性代换的一阶微分方程和直接进行两次积分的二阶微分方程, 并介绍了解的曲线.

3 呈现方式与严格性水平

在下面的表格中用 \triangle 表示新加坡教材中的情况, 用 \checkmark 表示人教社的相应情况.

3.1 概念的引入与呈现方式

新加坡教材中先给出割线的斜率, 然后由极限就定义了一阶导数, 接下来简单的推导之后就是各种函数的导数公式表. 中国教材中由气球膨胀率、瞬时速度等引入了导数, 在计算瞬时速度的时候还通过改变 Δt 的值, 以数值表的形式列出了速度的变化趋势, 用极限定义了导数, 又通过切线斜率说明了导数的几何意义.

对于定积分, 新加坡教材只是将区间分成五部分来求 $y=x^2$ 与 x 轴和 $x=1$ 所围成的面积, 然后通过例子 $\int_1^2 x^2 dx$ 给出了定积分的求法 (基本定理), 直接由面积给出了定积分的表达式, 并没有定义定积分, 表述很含混. 中国教材则通过“分割、近似代替、求和、取极限”四个步骤详细探讨了曲边梯形的面积和变速直线运动的位移, 并给出了一般的定义 (不过, 在定义中还是使用的均分区间的方式).

表2 教材中的概念

主题	引入方式				呈现方式		
	直接给出	数学史	数学问题	现实问题	图像	数值	符号
导数		\checkmark	\triangle	\checkmark	$\checkmark\triangle$	\checkmark	$\checkmark\triangle$
定积分		\checkmark	$\checkmark\triangle$	\checkmark	$\checkmark\triangle$	\checkmark	$\checkmark\triangle$

3.2 性质定理的呈现方式与严格性水平

新加坡教材中的19个性质定理中在严格性水平方面全是第一个层次——直接给出的; 在引

入方式上, 只有链式法则和隐函数求导法则是通过数学问题引入的, 其它都是直接给出. 呈现方式上, 只有单调性和求极值是采用函数图像说明, 其

表3 教材中的性质定理

主题	严格性水平				引入方式				呈现方式		
	直接给出	举例验证	较严格的说理	严格证明	直接给出	数学史	数学问题	现实问题	符号	图像	数值
和的导数	√△				√△				√△		
差的导数	√△				√△				√△		
积的导数	√△				△			√	√△		
商的导数	√△				√△				√△		
单调性	△	√			△			√		√△	
求极值	△	√			△			√		√△	
定积分的性质 1	√△				√△				√△		
性质 2	√△				√△				√△		
性质 3	√△				√△				√△		
基本定理	△	√			△		√		√△	√	

注:限于篇幅本表中只显示了中新两国教材中共有的 10 个性质、定理,新加坡还有 9 个定理,在下文中再做说明。

它的都是采用数学符号的方式.此外,新加坡教材中具体函数的求导和积分公式共有 44 个,其中有 5 个公式是由推导得出,其余都是不加证明地直接给出;没有凑微法的说明,只有直接使用凑微法的例子和公式;不加说明地将不定积分的分部积分等公式推广到定积分.中国的教材中,给出了 8 个具体函数的求导公式,其中有 1 个是经过证明的,还有一个是通过特殊情况说明的(即 x^n 的导数,课本中证明了 $n=1,2,-1$ 时的情况).

4 技术使用情况

中国教材中有 2 处使用信息技术的部分,并且都是以“信息技术应用”专栏的形式出现的.其中“图形技术与函数性质”部分泛泛地指出一些软件具有画图求极值等功能;“曲边梯形的面积”部分详细地介绍了用几何画板求面积近似值的过程,微积分部分使用信息技术的篇幅比例为 $\frac{3}{67}$.新加坡教材共有 11(其中有 2 处是在练习中的“探索”专栏)处使用信息技术,其篇幅比例为 $\frac{24}{102}$,在每一处使用时(“探索”除外),都详细地介绍了使用 TI-84 计算器的具体操作步骤,包括按键名称等,使用信息技术的内容包括:求在给定点的导数值、画函数图像、画曲线的切线法线、求定积分等.

5 总结与启示

5.1 新加坡的微积分体系完整、知识点多;我国教材更关注应用性

从表 1 中知,新加坡教材中基本上包含了一

元微积分的主要知识点和解题方法,而我国的教材只是介绍了导数和积分的概念,并重点探讨了多项式函数的微积分方法.相较而言,我国的内容更像是点到为止,在较为细致地介绍了概念后,例题和习题都很少,宛若蜻蜓点水.不过无论在引入概念还是在例题选取上,我国的教材都更关注应用性,有一些诸如“磁盘的最大存储量问题”等实际问题.笔者认为,我国应保持应用性的特点,同时,扩充例题和习题,使学生能够接触到更多各种不同类型的函数,从而对微积分的思想、技巧有更深的了解.

5.2 新加坡的教材常直接给出性质定理;我国教材强调例证与说理

新加坡教材似乎更像一个公式大全.里面很少有说理和证明,解释性和叙述性的文字也很少,只是把公式列出来,然后就用例题套公式、通过计算器求解画图,有时在空白处注上注意事项和需要探索的问题.这样可以提高教学的效率,但是由于缺乏说理,而可能会使学生有枯燥之感.我国的教材中,更强调例证,如在单调性和极值的探讨中,通过例子来得出一般的结论,这种方式虽不是十分严格,但符合学生的认知特点,易于接受.我国教材中在引入方式和表征方式上也更加多样化,如通过数学史、数学问题、现实问题引入,通过数值、图像、符号等多种表示方法,加强学生的理解.

(下转第 10 页)

表八:初中段深度比较表

版本名称 行为动词	内容深度				深度加权	
	2001	2011	2001 百分比	2011 百分比	2001	2011
了解	105	104	29.09%	27.73%	2.18	2.23
理解	128	111	35.46%	29.60%		
掌握	85	128	23.55%	34.13%		
运用	43	32	11.91%	8.53%		

注:以上统计均保留两位小数.

由表八可知,《2001 版标准》与《2011 版标准》属于“了解”水平的知识点分别为 29.09% 和 27.73%,降低了 1.35 个百分点,属于“理解”水平的知识点分别为 35.46% 和 29.60%,降低了 5.86 个百分点,属“掌握”水平的知识点分别为 23.55% 和 34.13%,提高了 10.59 个百分点;属于“运用”水平的知识点分别为 11.91% 和 8.53%,降低了 3.38 个百分点.《2011 版标准》与《2001 版标准》的加权平均分别为 2.23 和 2.18,显然《2011 版标准》比《2001 版标准》在深度上有所增加.具体到三部分内容上,深度变化各不相同,具体如三部分内容深度比较图表.

7 结论

《2011 版标准》课程内容的的设计,数与代数、图形与几何方面向“宽而深”设计模式演变,统计与概率方面向“窄而浅”模式演变,课程内容的总体向“宽而深”的设计模式演变.此次调整,主要是

增强了“掌握”方面的内容,特别是图形与几何部分,“理解”和“掌握”的内容明显加强,数与代数部分的“掌握”部分也得到了明显加强.显然吸取了美国数学课程内容改革“宽而浅”^[2]、日本数学课程内容改革“窄而深”^[3]效果不佳的经验教训,使得我国数学课程内容的广度和深度的设计更加科学,初中数学课程内容体系更加趋于完善,这些更有利于对学生创新精神和解决问题的实践能力的培养,从而使每个学生受到良好的数学教育,每个学生得到最大限度地发展.

参考文献

- 1,2,3 李淑文 史宁中.中日两国初中几何课程内容的比较研究[J].全球教育展望,2012,1
- 4 中华人民共和国教育部制订.全日制义务教育数学课程标准(实验稿)[M].北京:北京师范大学出版社,2001,9
- 5 中华人民共和国教育部制订.全日制义务教育数学课程标准(修改稿)[M].北京:北京师范大学出版社,2010,9

(上接第6页)

5.3 新加坡的教材中的技术使用部分非常详尽,可操作性强

新加坡教材中有超过 $\frac{1}{5}$ 的篇幅使用信息技术,这一方面代替了繁琐的计算,使学生能够熟练地使用技术工具;另一方面,这些技术的使用也弥补了教材中说理的不足和表征方式的单一,增进了学生的理解,同时提高了教学的效率.我国教材中的技术使用部分,由于缺乏具体的指导而缺少针对性,泛泛而论甚至成为教材正文内容的一种重复.如果我国教材中的技术使用部分能针对具体的软件或计算器做介绍,并配以形象的截图,那么会大大提高可操作性.

此外,新加坡教材中的一些开放性、阐述性及探索性的例题和习题也是值得我们借鉴的.总之,

新加坡教材中数学内容更丰富、结构更完整,但很多定理是直接呈现而未证明的,所以严格性水平很低.而我国教材重在阐述概念,但例题和习题不多.同时我国教材强调应用性、数学史,强调数值、图像等多种表征,这是值得我们继续保持的,但似乎有时有“故意而为之”的牵强之感.如何能把这些优点与教学内容及我国学生的具体情况有机地结合,这是需要继续研究的问题.

参考文献

- 1 赵小平,姚雪.上海与新加坡中学概率统计教材的比较研究[J].数学教学,2010,2
- 2 Spario Soon. H2 Mathematics(For A Level) Volume 1.新加坡:EPB Pan Pacific,2007
- 3 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.数学:普通高中课程标准试验教科书[M].第2版.北京:人民教育出版社,2007