

中国与新加坡初中数学教材中的 “平均数、中位数和众数”比较

吴 骏^{1,2} 汪晓勤¹

(1. 华东师范大学数学系 200241; 2. 曲靖师范学院数学与信息科学学院 655011)

从国际比较研究的角度来看,课程是引起学生学习差异的一个关键因素,尤其是数学教材对学生的数学成绩有着潜在的影响.通过对不同国家数学教材内容的比较,可以考察学生在数学学习经历上的差异,以及这种差异对学生数学学习产生的影响.平均数、中位数和众数是初中数学教材中表示集中趋势的统计量,虽然它们的计算较为简单,但学生对其统计意义的理解却并非容易.在教学中,仅仅要求学生会计算这些统计量是不够的,还需要把统计思想讲清楚,让学生能品尝到其中的“统计味”,从中获得统计知识,达到教学的真正目的^[1].实际上,平均数、中位数和众数这个内容看似简单,实则不易,这是教学中的一个困惑点.本文选取“平均数、中位数和众数”这个内容,从微观层面对中国和新加坡教材进行考察.中国的教材,我们选取被广泛使用的人民教育出版社2008年出版的《义务教育课程标准实验教科书·数学》(八年级下册)(以下简称《中数学》),新加坡教材选取范良火博士主编, Panpac Education 出版社于2008年出版的《New Express Mathematics》(第二册)(以下简称《新数学》).通过对两国平均数、中位数和众数内容的比较,以期对我国的教材建设有所启示.

1 整体结构的比较

1.1 编写意图

《中数学》和《新数学》都设置了单元导言,对本单元的内容进行介绍.《中数学》首先指出用样本估计总体是统计的基本思想,再通过如何考察一种甜玉米的产量和产量的稳定性这样的问题,说明用样本特征值估计总体特征值的方法来了解总体,最后提出学习的目标是对数据的作用有更

多的认识,对用样本估计总体的思想有更深的体会.《新数学》在导言中先提出问题:体操比赛中,为什么一个选手的最终得分不是裁判给出评分的平均数,而要去掉一个最高分和一个最低分再求平均数?然后说明本章将要学习统计平均值,即平均数、中位数和众数,最后说明通过本章的学习,将能回答上述问题,并提出了本章的具体学习目标.

通过以上比较发现,《中数学》与《新数学》都有很强的问题驱动意识,但编写意图有所不同.《中数学》体现样本估计总体的思想方法,而《新数学》则强调运用数据分析的观念解决实际问题.这反映出两国数学课程各自不同的基本理念.我国新课程改革要求学生掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法,这是我国的传统优势.在新加坡的五边形数学课程框架中,数学问题解决居于核心地位,这是其独特的数学课程模式.

1.2 内容设置

《中数学》和《新数学》都设置了平均数、中位数和众数这几个知识点,不同之处是对平均数的处理.《中数学》中的平均数主要是指加权平均数,教材中给出了加权平均数的概念及其计算公式,并要求学生能理解“权”的意义,掌握算术平均数和加权平均数的区别和联系.《新数学》的平均数主要是指算术平均数,首先给出了数集及其元素之和的概念,在此基础上再得到算术平均数的概念及其形式化的计算公式,而把加权平均数分为频数分布和分组数据的平均数两部分来学习,教材中没有出现加权平均数这个概念.

可以看出,《中数学》中没有出现算术平均数的概念,而是通过加权平均数的学习来加强对算

术平均数的巩固和深化. 这样处理教材的难度会加大, 对学生提出了更高的要求. 相反, 《新数学》把对算术平均数概念的理解提升到了形式化的水平, 并有效地分解了加权平均数概念理解的难度.

1.3 知识呈现

《中数学》和《新数学》在知识的呈现上是不一样的. 《中数学》的章标题是“数据的分析”, 第一节为“数据的代表”, 下设两小节, 编排顺序是: 加权平均数——中位数和众数. 《新数学》的章标题是“统计中的平均值”, 下设四节, 编排顺序是: 算术平均数——中位数——众数——平均值的比较——频数分布和分组数据的平均数. 通过对比, 我们发现《中数学》是在小学算术平均数的基础之上来学习加权平均数, 并进一步学习中位数和众数. 而《新数学》是在充分学习算术平均数、中位数和众数的基础之上, 再来学习加权平均数. 另外, 《新数学》在如何选用平均数、中位数和众数上比《中数学》做得要好. 《中数学》在这一节的内容结束之后对三个统计量的应用做了一个简单的归纳, 但缺乏相关的具体例子. 而《新数学》用一节的内容对这三个统计量的特征做了一个比较, 并提供了足够多的例题和习题. 可以认为, 《新数学》的编排, 学生对平均数、中位数和众数的统计意义的理解会更加深刻, 在选用上会更加合理.

2 具体内容的比较

2.1 平均数、中位数和众数概念的导入

《中数学》与《新数学》在加权平均数和众数概念的导入上基本相似, 但在中位数的导入上差异较大. 《中数学》是先给出中位数的定义, 再举例说明中位数的计算和意义. 《新数学》则首先提出如下问题:

一个小公司有 7 名职员, 一名雇员每月的薪水是 2000 美元, 其他 6 名职员的薪水分别是 1200、1350、1450、1700、1850 和 4800 美元, 该雇员认为他的薪水低于平均数, 处于相对较低的位置, 你同意他的看法吗?

通过计算, 7 个职员的平均工资是 2050 美元, 该雇员认为他的薪水低于平均数是对的. 然而, 通过和其他职员的工资进行比较, 他的薪水实际上是很高的, 因为他的薪水处于第二高的位置, 还有 5 位职员的薪水低于平均数. 这个例子表明, 在某些情况下, 即当数据中存在极端值时, 算术平

均数可能没有意义, 有时甚至会产生误导. 在这种情况下, 我们将要介绍另一个表示集中趋势的统计量, 这就是中位数. 接下来给出中位数的定义及其计算公式.

我们发现, 《新数学》的处理拟合了中位数的历史发展规律. 在历史上, 中位数几乎是作为平均数的替代品而出现的. 在 19 世纪, 科学家有各种不同的理由来使用中位数代替平均数. 1874 年, 费歇尔(Fechner)借助于天文学中行之有效的办法, 使用中位数来描述社会和心理现象. 1882 年, 高尔顿(Galton)第一次使用“中位数”这个术语, 取得了观念上的突破, 但高尔顿研究的大多数现象几乎是对称的, 所以中位数和平均数没有太大的区别. 与高尔顿同时代的埃其渥斯(Edgeworth)发现平均数对极端值的敏感性, 因此选择了中位数代替平均数. 这可能源于埃其渥斯对经济学的兴趣, 而经济学中大多是一些不规则的数据^[2]. 现在, 中位数对极端值的不敏感性是使用它的主要原因. 随着统计学运用到越来越多的不规则数据中, 中位数的使用受到了人们的普遍欢迎.

2.2 平均数、中位数和众数的特征

《中数学》中三个统计量的特征是: 平均数的计算要用到所有的数据, 在现实生活中较为常用, 但受极端值的影响较大; 中位数只需要很少的计算, 不易受极端值的影响; 众数适用于一组数据中某些数据多次重复出现的情况, 也不易受极端值的影响. 《新数学》对三个统计量的描述更为仔细, 除了具备《中数学》中的特征外, 还关注数据的分布状况: 在数据呈对称分布时平均数是很好的统计量; 中位数在数据呈非对称分布时更有代表性; 众数是唯一可以测量非数字类型数据的统计量. 事实上, 我们现在处理的数据, 大部分是对称的数据, 数据符合或者近似符合正态分布. 这时候, 平均数、中位数和众数是一样的. 只有在数据偏态的情况下, 才会出现平均数、中位数和众数的区别. 所以说, 如果是正态的话, 用哪个统计量都行. 如果偏态的情况比较严重, 则可以用中位数. 而当数据出现明显集中趋势时, 宜选用众数, 但众数的运用要结合其它统计量进行, 一般不单独使用.

2.3 平均数、中位数和众数的计算

《中数学》和《新数学》中平均数、中位数和众数的计算主要有两种方法: 一是根据定义直接进

行计算,另一种是利用计算器或计算机计算.不同之处是《中数学》题目中数据的描述多采用列表、条形图、直方图和折线图等,《新数学》除了使用这些表示方法之外,还更多地用到点图和茎叶图,而后两种方法在求统计量时更为直观和简捷.此外,我们还注意到,两国教材在计算机的使用上仅仅是用计算机去求这些统计量的值.实际上,这三个统计量的计算很简单,教学中要避免单纯的统计量的计算,否则的话,统计教学就变成了代数教学,失去了其统计价值.因此,计算机的使用除了计算功能外,更重要的是要发挥它的发现功能和探究功能.但两国教材在这个方面的处理都较为欠缺,这不能不说是教材编写的一个缺憾.

2.4 平均数、中位数和众数的应用

平均数、中位数和众数的应用主要体现在课题学习中.《中数学》要求学生收集近两年本校七年级学生的《体质健康登记表》,分析登记表中的数据,对学生的体质健康情况进行评定,提出增强学生体质健康的建议.该课题的完成需要经历收集数据、整理数据、描述数据、分析数据撰写调查报告等几个过程.

《新数学》要求学生阅读当地最近的报纸,了解统计平均值,即平均数、中位数和众数在新闻报道中的作用,然后根据自己的发现写一个简短的报告,有两点要求:(1)在你的报告中,所使用的例子要尽可能用到平均数、中位数和众数;(2)如果报告中的例子用到了这些统计量,你也应该对你的观点作出解释.

《新数学》对平均数、中位数和众数的应用还表现在国民教育与数学教育相结合的问题上,并常常通过列举与国情相符的实例来实现.《新数学》中多次引用新加坡统计部门公布的统计数据,如新加坡的经济增长率、失业率、通货膨胀率、家庭收入等.例如,通过对大学毕业生和非大学毕业生的经济收入对比后提出如下问题:为什么两类人员收入的平均数总是超过中位数?你知道为什么政府报告中关于收入分配总是引用中位数而不是平均数作为平均指标?相比之下,《中数学》对平均数、中位数和众数的应用显得比较狭隘,缺乏对当前社会政治、经济和文化的关注.在这一点上,《新数学》的做法是值得借鉴的.

3 对我国教材建设的启示

3.1 完善平均数、中位数和众数的知识结构

在我国人教版中小学教材中,三年级下册学习算术平均数,五年级上册学习中位数,五年级下册学习众数,八年级学习加权平均数并进一步学习中位数和众数,到了高中还有这三个统计量的内容以及随机变量的数学期望.因此,初中教材平均数、中位数和众数的处理起着承上启下的重要作用.教材如果处理不当,则会出现不必要的重复,违背了螺旋上升的原则,变成旋而不升了.

从以上各年级对平均数教学的安排可以看出,从算术平均数到加权平均数经历了一个很大的跨越,其实学生并未做好这方面的准备,我们的教学也远远没有跟上^[3].借鉴《新数学》的做法,《中数学》可以先给出算术平均数的定义和计算公式,形成概念性理解之后,再进一步过渡到加权平均数.

由历史的相似性原理,历史上数学家遭遇到的困难会在现在学生的学习中重新出现.因此,为了引导学生重现知识的发生发展过程,对于中位数的导入,可以遵循数学史上中位数的发展顺序展现给学生.此外,教材还可以适当补充平均数和中位数的数学史知识,有助于学生深刻理解认识对象的内在本质和它的发展规律,这样根植于数学知识的历史发展过程之中并再现数学知识发展的内在规律的数学学习才是合理的、高认知水平的^[4].

众数的识别还应包含非数字的类型,如在选举投票中,当选者就是票数最多者,其名字就是众数,这样使得众数的应用范围更加广泛.

在学习了这些统计量之后,教学的重点是培养学生对统计量的选择能力.实际上,根据作出决定的需要,平均数、中位数和众数可能分别是在不同情况下最好的统计量^[5].因此,教材除了对这些统计量的特征进行归纳、总结外,还要补充一些实际问题让学生讨论,以做到对平均数、中位数和众数的合理选用.

3.2 适当增加一些数据表示法

在国外教材中,较多地使用点图(dot diagram)、茎叶图(stem-and-leaf diagram)和箱线图(box-and-whisker plot)表示数据,与条形图、扇形图、折线图、直方图相比,各有各的优势.点图完

全手工,不用借助计算机,简单清楚.茎叶图在我国是高中阶段学习的内容,具有两个方面的优点:一是从统计图上没有信息的损失,所有的信息都可以从这个茎叶图中得到;二是茎叶图可以在比赛时随时记录,方便记录与表示.箱线图虽然不会像直方图那样给出很多具体的信息,如哪里数据比较集中,但箱线图可以有效地比较两组数据,因为它可以使中位数和中间间距等特点明显地表示出来,能够给出数据的大致分布状况,便于从整体上了解数据蕴含的规律.高等教育出版社2008年出版了盛骤等编写的高等学校教材《概率论与数理统计》(第四版),该教材新增了箱线图,用于描述随机变量分布的性质.由此可见,我国的数据表示方法介绍较晚.学生应该及早学习这些方法,不仅使数据的描述更为直观,统计量的计算更加方便,而且能了解数据的分布情况及其性质.因此,我国教材应在学习平均数、中位数和众数之前,即在七年级下册“数据的收集、整理与描述”一章中补充这些方法.

3.3 利用计算机模拟试验

中小学统计课程的教学应当是一种直观的教学.什么是直观的教学呢?就是更多地依赖于学生的经验,特别是他们曾经亲身经历过的经验,从中去感悟、分析、理解、抽象,最后形成概念,学会判断反复重复这个过程,直觉就建立起来了^[6].在这个教学过程中,利用计算机是有益的,但除了计算,更重要的是模拟试验.而对于这一问题,两国教材都存在不足之处.事实上,在平均数、中位数和众数的学习中,通常一个至关重要的问题是:在一组数据中,数据的变化怎样影响它的平均数和中位数?要检验这一问题,可以通过计算机软件非常有效地反映出来.例如,可以设计制作点线的计算机软件,让学生描述出一组数据并在直线上标明平均数和中位数,只要改变其中的一个数据值,以及增加或者去掉一个数值,计算机软件就立刻给出新数据组的平均数和中位数.通过对不同的数据反复地重复这一过程,学生会注意到改变一个数据值通常不会影响到中位数,除非被改变的值是这组数据的中位数或改变了其对于中间值的方向关系,但任何改变都会影响到平均数.因此,平均数常会受到极端值的影响,因为它受到各数据值的影响,而中位数只与数据值的相对位置

有关.其他类似的问题也有助于学生理解平均数和中位数的不同灵敏性,例如,平均数对一个或两个极端值的增加或去掉非常敏感,而中位数对这样的变化则很不敏感^[7].

3.4 加强与现实生活的联系

弗赖登塔尔认为,数学来源于现实,存在于现实,作用于现实.对于数学知识的学习,不仅需要和其它学科联系,还要考虑与现实世界各种不同领域之间的联系.这样,才能使掌握比较完整的数学体系,也才有可能把学到的数学知识应用到现实世界中去.我国广播、电视、报纸等大众媒体经常提到平均数,而对于中位数和众数则很少提到,由此经常会产生“平均数误导”,以为平均数就是中等水平.数据偏差并非故意造假,统计方法的落后会导致结论出现偏差.近日,国家统计局启动统计方法改革,研究统计计算工资中位数.由于我国高收入者较少,低收入者较多,按照现行方法计算出来的平均工资会高于中间者的收入.因此,在统计工资时可考虑用中位数法代替现在的平均数法.这样的方法适用于工资统计,也同样适用于房价统计.如果采用中位数法,找到处于中间价位的那个房价更具有代表性,表达的是处于中等收入的那个人是否能够负担得起中间价位的那个房价,这样才更贴近居民感受.由此可见,平均数、中位数和众数的学习要与现实生活紧密相连,才能用统计的观点和思维去分析和解决实际问题.

参考文献

- 1 茆诗松.漫谈平均数[J].数学教学,2008,(9):7-8
- 2 Bakker A, Koeno P E. An Historical Phenomenology of Mean and Median[J]. Educational Studies in Mathematics, 2006, 62(2):149-168
- 3 梁绍君.“算术平均数”概念的四个理解水平及测试结果[J].数学教育学报,2006,15(3):35-37
- 4 徐章韬.基于数学史的平均数和中位数的教学案例设计[J].中学数学教学参考,2007,(10):15-17
- 5 Holt M, Stephen M. Mean, Median and Mode from a Decision Perspective[J]. Journal of Statistics Education, 2009, 17(3):40-48
- 6 史宁中,孔凡哲,秦德生等.中小学统计及其课程教学设计[J].课程·教材·教法,2005,25(6):45-50
- 7 全美数学教师理事会制订,蔡金法等译.美国学校数学教育的原则和标准[M].北京:人民教育出版社,2004