

# 中国与新加坡初中数学教材中概率习题的比较研究

吕世虎, 孙学敏

(西北师范大学 教育学院, 甘肃 兰州 730070)

**摘要:** 从习题的数量和数学认知水平两个维度, 对我国初中数学教材和新加坡初中数学教材中“概率初步”内容的各类习题进行比较分析, 发现: 我国教材习题总量较少, 但课后习题的编排具有层次性; 我国教材中高认知水平的习题比新加坡少; 我国教材重视基本概念, 而新加坡教材则重视学生数学高认知水平的培养。

**关键词:** 教材; 习题; 认知水平

**中图分类号:** G624.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-9894 (2010) 06-0070-04

新加坡的数学教育因其连续 3 次在国际数学与科学教育调查 (TIMSS1996, TIMSS1999, TIMSS2003) 中位居前列而一直倍受国际数学教育界的关注。2004 年 12 月中旬, 《华尔街日报》专门刊发文章介绍了全美国共有大约 200 所学校引进了新加坡的数学课程, 而且很多使用新加坡教材的美国学生数学成绩提高了, 一些曾感到数学难学的孩子开始喜欢数学了。我国正在实施新一轮基础教育数学课程改革, 数学教材改革是其中的主要内容。新加坡的文化背景与我国极为相似, 研究新加坡的数学教材对于我国数学课程改革无疑具有重要的借鉴意义。

习题是中学数学教材的重要组成部分, 习题配置在一定程度上反映了数学教材编者的价值取向和编写风格。因此, 对教材中的习题进行研究是教材研究的一个重要方面。我国于 2001 年 7 月颁布的《全日制义务教育数学课程标准》(实验稿)(以下简称《课标》)<sup>[1]</sup>将统计与概率作为义务教育数学课程的 4 个学习领域之一。尤其是概率内容是第一次进入我国义务教育数学课程之中, 初中数学教材中也是第一次出现概率内容, 对教材中概率内容编排我们需要借鉴其它国家的成功经验。本文拟对中国与新加坡初中数学教材中的“概率初步”内容的习题进行比较研究, 以此来反映新加坡和中国初中数学教材编写的价值取向和编写风格。

本研究中, 新加坡初中数学教材选取 Prof. Lee Peng Yee 等主编的《New Syllabus Mathematics》<sup>[2]</sup>(以下简称《新数学》), 中国初中数学教材选取人民教育出版社出版的《义务教育课程标准实验教科书数学》<sup>[3]</sup>(以下简称《课标数学》)。《新数学》中的概率内容集中在第 4 册第 6 章“概率”中, 该章包括概率的经典定义, 样本空间和事件, 样本空间中的可能事件, 概率图, 树形图, 概率的加法, 概率的乘法等 7 节。《课标数学》中的概率内容集中在 9 年级上册第 25 章“概率初步”中, 包括概率, 用列举法求概率, 利用频率估计概率等 3 节。两种教材中的概率内容既有共有的部分, 也有各自独有的内容。《新数学》中第一节“概率的经典定义”用古典概型的方式给出了概率的定义, 并介绍了随机事件, 《课标数学》第一节“概率”中对概率的定义先用频率, 后用古典概型, 也介绍了随机事件。两种教材第一节知识点都是概率的定义和随机事件, 内容相同。《课标数学》“用列举法求概率”一节包括列表法和树形图两部分内容。《新数

学》虽然把“样本空间和事件”, “样本空间中的可能事件”单独列为两节, 但作为进一步学习“概率图”的基础知识, 并没有单独设置习题。《课标数学》虽然没有单独介绍样本空间和事件, 但已经渗透了这部分内容。《新数学》中的概率图即为《课标数学》中的列表法。因此, 与《新数学》“样本空间和事件”, “样本空间中的可能事件”, “概率图”3 节对应的是《课标数学》中“用列举法求概率”一节的列表法内容。《新数学》中“树形图”一节对应《课标数学》“用列举法求概率”一节中的树形图内容。两种教材其它几节的内容互不相交。因此, 本文选取两种教材共有内容的课后习题进行比较研究。《新数学》选取概率的经典定义, 样本空间和事件, 样本空间中的可能事件, 概率图, 树形图 5 节内容, 《课标数学》选取概率, 用列举法求概率两节内容。

初中数学教材中的习题分为练习题、习题和复习题。其中, 练习题主要是单一的概念、运算法则, 某种数学技能、性质应用等, 其作用是熟悉和巩固相应小节的教学内容, 供课堂教学用。习题、复习题, 其背景是多个知识点及深广度不一的数学思想方法的综合, 其作用是加深对“双基”的理解, 巩固和掌握知识、技能和思想方法, 创造性地解决一些综合性的问题, 提高分析与解决问题的能力。复习题的综合性更强。我国数学教材中的习题包括练习题、习题和复习题, 而新加坡教材只有习题和复习题。因此, 本文以练习题、习题和复习题作为比较框架, 分别从习题总量和数学认知水平两个维度对这 3 类习题进行比较研究。下文中, 在没有特别说明时, 习题是练习题、习题和复习题的统称。

## 1 习题总量的比较

本研究对两国教材中“概率初步”共有内容的各类习题数量进行统计。由于两国教材配置的习题都有一个题目中包含多次提问和一个大题下有若干小题的情况, 因此, 在对习题数量进行统计时, 对于题目里如有多次提问的习题, 按一题统计, 对于大题中如有若干小题的习题, 按小题数量统计。例如, 我国教材中的习题: 掷一枚质地均匀的硬币的试验有几种可能的结果? 它们的可能性相等吗? 由此怎样确定“正面向上”的概率。该题目中有多次提问, 按一个题目统计。从一副扑克牌中任意抽取一张。(1)它是王牌的概率是多少?(2)它是 Q 的概率是多少?(3)它是草花的概

收稿日期: 2010-08-10

基金项目: 甘肃省高校研究生导师科研资助项目——中国当代中学数学课程发展史研究 (0901-11)

作者简介: 吕世虎 (1963—), 男, 甘肃平凉人, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事数学教育史、数学课程与教学论研究。

率是多少？该题目包含3个小题，按3个题目统计。新加坡教材中的习题：在一个实验里，两个转盘由旋转指针构造而成，如图，两个指针都可以旋转。为此次实验做出样本空间。样本空间中有几种可能结果？利用概率图表示。此题也按一个题目统计。随机写出一个两位数，算出是以下数的概率：(a) 小于20，(b) 偶数，(c) 5的倍数。此题按3个题目统计。按此标准分别统计两国教材中“概率初步”共有内容的练习题、习题和复习题的数量和所占比例，结果如表1所示。表中括号内的百分数为该类习题数量占总习题量的百分比。

表1 中新教材中“概率初步”内容习题总量统计表

	练习题	习题	复习题	总计
中国	20 (29.9%)	34 (50.7%)	13 (19.4%)	67
新加坡	0	93 (85.3%)	16 (14.7%)	109

从表1可以看出，在习题总量上，新加坡教材远远多于我国教材。但从习题类型上看，我国教材的习题分为练习题、习题和复习题，这3种类型习题分别占习题总量的29.9%、50.7%、19.4%。而新加坡教材没有安排练习题，只有综合性较强的习题和复习题，这两种类型习题分别占习题总量的85.3%、14.7%。可见，新加坡教材更加注重综合性较强的习题。

## 2 习题认知水平的比较

### 2.1 习题水平层次的刻画

1950年代，布卢姆在《教育目标分类学》中把认知目标分成知识、领会、运用、分析、综合、评价6种水平。威尔逊(J. W. Wilson)曾把布卢姆的目标分类原则引入数学学科，设计了计算、领会、运用、分析4个层次的认知目标。后来有人明确指出了布卢姆分类理论在连续性与层次性方面存在漏洞。1990年与2007年，顾泠沅等在做“青浦实验”时采用大样本测试结果，从初中二年级学生在数学学习中大量外显行为所表征的教学目标中析取其内隐的主要因素，由此确定目标框架的层次并研究分类的连续性<sup>[5]</sup>。后又经改造和完善，把数学认知水平分为4个层次：水平1：计算——操作性记忆水平；水平2：概念——概念性记忆水平；水平3：领会——说明性理解水平；水平4：分析——探究性理解水平。在这4个层次中，水平1、2为较低认知水平，水平3、4为较高认知水平，水平4称为高认知水平。本文中根据学生解答某类习题所需要达到的数学认知水平层次，对概率习题的数学认知水平的层次作出如下界定。

水平1：计算——操作性记忆水平。该层次的习题只需要学生具备最低层次的数学认知水平就可以完成解答。解答这类习题时学生按照教材所明确要求的程序或方法进行基本的运算。这里只需要记住程序，按部就班地做即可，不需要理解运算。如：已知投篮次数 $n$ ，投中次数 $m$ ，计算投中频率 $\frac{m}{n}$ ，学生按照所给的程序计算即可。

水平2：概念——概念性记忆水平。考察学生对教材中概念理解的题目。解答该层次的习题需要学生呈现已经学习过的数学事实或术语、基本概念等，能对概念进行特殊分类，揭示概念的外延，并利用概念的定义进行简单的识别活

动。如，指出下列事件中，哪些是随机事件，哪些事件是必然发生的，哪些事件是不可能发生的：(1)通常温度降到0℃以下，纯净的水结冰；(2)随意翻到一本书的某页，这页的页码是奇数；(3)地面发射一枚导弹，未击中空中目标……该习题需学生回忆和提取随机事件的概念并作出判断。

水平3：领会——说明性理解水平。该水平习题所要求的数学认知水平超越了前两个仅依赖记忆的认知水平。解答这类习题要求学生能在适度复杂的问题上应用数学的概念和程序，进行简单的推理，使问题得到解决，这不仅需要对运算、概念有彻底的理解，还需要确定题目所给的哪些信息对解决问题是有用的。包括与例题相近的习题。如，一个袋子里有40个玻璃球，25个绿的和15个红的，从袋子里随机地拿出一个玻璃球，它是红色的概率是多少？解答此题需要学生彻底理解所提问题的原理和问题中涉及的概念，对所给的信息进行筛选，对所提问题进行提炼，然后进行解答。

水平4：分析——探究性理解水平。解答该层次的习题需要学生具备最高层次的数学认知水平，对问题进行分析，并把分析过程综合起来，创造性地解决问题。这类习题学生之前没有接触过或没有现成的解决方案，包括开放题、探究问题、不同于例题的非常规问题等。例如，有两把不同的锁和3把钥匙，其中两把钥匙恰好分别能打开这两把锁，第3把钥匙不能打开这两把锁。任意取出一把钥匙去开任意的一把锁，算出一次打开锁的概率。

### 2.2 习题水平层次的比较分析

根据以上对习题的数学认知水平层次的刻画，本研究对中新教材中“概率初步”内容配置的练习题、习题和复习题从数学认知水平的维度进行分类统计，分别统计出两国教材中不同类型习题在各水平层次的数量和比例。中新教材中练习题的数学认知水平层次统计结果如表2所示，其中百分数为该水平的习题数量占此类总习题量的百分比（以下同）。

表2 中新教材“概率初步”练习题数学认知水平统计表

	水平1	水平2	水平3	水平4	总计
中国	1 (5.0%)	9 (45.0%)	9 (45.0%)	1 (5.0%)	20
新加坡	0	0	0	0	0

从表2可以看出，我国教材的练习题以水平2和水平3的题目为主。练习题背景主要是单一的概念、运算法则，某种数学技能、性质应用，水平2的题目考察学生对课本中概念的理解，水平3的题目则要求学生应用数学的概念和程序，进行简单的推理，符合练习题“巩固理解课堂教学知识”的设置目的。而新加坡教材没有练习题。中新教材中习题、复习题的数学认知水平层次统计结果如表3、表4所示。

表3 中新教材“概率初步”习题的数学认知水平统计表

	水平1	水平2	水平3	水平4	总计
中国	2 (5.9%)	6 (17.7%)	20 (58.8%)	6 (17.6%)	34
新加坡	0	0	68 (73.1%)	25 (26.9%)	93

表4 中新教材“概率初步”复习题的数学认知水平统计表

	水平1	水平2	水平3	水平4	总计
中国	0	0	10 (76.9%)	3 (23.1%)	13
新加坡	0	0	11 (68.8%)	5 (31.2%)	16

从表3、表4可以看出,新加坡教材虽然没有练习题,却安排了大量的习题和复习题,而且都是水平3和水平4两个较高认知水平的题目,水平4的题目比例均高于我国,显示出新加坡对综合性强、高认知水平习题的重视。而我国教材的习题包含水平1至水平4各认知水平层次的题目,水平1、水平2的题目占习题总数的23.6%,水平3、水平4的题目占习题总数的76.4%;复习题只包含水平3、水平4两个较高认知水平层次的题目。我国教材的习题既有以单一概念和简单数学技能为背景,供课内“巩固课堂所学知识技能”使用的题目,也有供课外“培养学生的能力,发展学生的智力”所用的题目。习题中少数标有\*号的题在难度上略有提高,仅供学有余力的学生选用。复习题要求学生能对知识、技能进行分析、综合、复习和运用,创造性地解决相关综合性强的题目,灵活性更高,综合性更强,供每章复习时使用。复习题分为A、B两组,B组的难度高一些。这反映出我国教材中习题选择和编排的层次性。

为分析习题的总体数学认知水平,本研究统计中新教材中“概率初步”共有内容的所有习题中各认知水平题目的数量及其所占比例,统计结果如表5所示。

表5 中新教材“概率初步”习题总体数学认知水平统计表

	水平1	水平2	水平3	水平4	总计
中国	3 (4.5%)	15 (22.4%)	39 (58.2%)	10 (14.9%)	67
新加坡	0	0	79 (72.5%)	30 (27.5%)	109

从表5中可以看出,在认知水平上,新加坡教材没有水平1的习题,中国教材该水平习题所占的比例也很小(4.5%)。水平2的习题,新加坡教材没有,中国教材占22.4%,明显高于新加坡。两国教材中水平3、水平4的习题相差较大。水平3的习题,中国比新加坡少14.3%,水平4的习题,中国比新加坡少12.6%。

整体来看,中国较低认知水平(水平1与水平2)的习题占26.9%,而新加坡没有较低认知水平的习题。中国较高认知水平(水平3与水平4)的习题占73.1%,新加坡较高认知水平的习题占100%,比中国多26.9%。

### 2.3 对较高认知水平题目的类型的进一步分析

通过以上分析发现:新加坡教材较高认知水平习题多于我国。为了找出差距在哪里,本研究对两种教材中水平3和水平4的习题分别作进一步具体的分析。

两种教材中水平3的题目主要是概率计算题,要求学生在适度复杂的问题上筛选有用信息,联系相关知识进行解答,因此按照学生解答概率题目时需要联系的相关知识把水平3的习题分为以下3类:

(1) 根据题目所给条件可直接解答的题目。解答该类题目只需要学生筛选有用信息,不需要学生联系题目以外的其它知识,或解答题目所需要的知识在题目中已给出。如,我国教材中的习题:袋子中装有红、绿各一个小球,随机摸出一个小球后放回,再随机摸出一个,求第一次摸到红球,第二次摸到绿球的概率。

(2) 需联系本章(节)以外的数学知识解答的题目。解答这类题目时需要学生联系以前学习的数学知识,如果了解这些数学知识,不能完成解答。如,新加坡教材中的习题:

从1到30中任意取一个数,取到的是素数的概率是多少?需要学生联系素数这一数学知识。

(3) 需联系生活常识解答的题目。解答这类题目时需要学生联系相关的生活常识。如,我国教材中的习题:从一副扑克牌中任意抽取一张,那么:①它是王牌的概率是多少?②它是Q的概率是多少?③它是草花的概率是多少?需联系扑克牌的一些常识。

分别统计两种教材水平3习题中以上3种类型的习题数量及所占的比例,统计结果如表6所示。

表6 中新教材“概率初步”水平3习题类型统计表

习题类型	中国	新加坡
根据题目所给条件后可直接解答的题目	27 (69.3%)	48 (60.8%)
需联系本章(节)以外的数学知识解答的题目	2 (5.1%)	23 (29.1%)
需联系生活常识解答的题目	10 (25.6%)	8 (10.1%)
总计	39	79

从表6可以看出:新加坡教材中水平3的习题总量比我国多。其中,分析题目所给条件后可直接解答的题目,中国占69.3%,新加坡占60.8%,新加坡比我国少8.5%。对于需联系本章(节)以外的数学知识解答的题目,新加坡教材占29.1%,我国只有5.1%,新加坡比我国多24.0%。这说明新加坡教材重视联系本章(节)以外的数学知识的习题。新加坡教材在这类习题中联系整除、倍数、素数、奇数、偶数等概率章节以外的数学知识,学生在练习新知识的同时使以前所学的旧知识得到回忆和巩固,这是我国教材所欠缺的。而对于需联系生活常识解答的题目,我国比新加坡多15.5%。说明我国教材的习题注重与生活常识的联系。

水平4的习题需要学生创造性地解决问题,学生之前没有接触过现成的解决方案。结合“概率初步”内容的特点,按照学生解答题目需要的解题方法把水平4的习题分为5类。分别统计两种教材中水平4习题的类型及各类型题目所占的比例,统计结果如表7所示。

表7 中新教材“概率初步”水平4习题类型统计表

习题类型	中国	新加坡
探究性习题(现实生活中的问题,需建立概率模型进行分析)	5 (50.0%)	18 (60.0%)
非常规习题(与例题相比变化较大,以前没接触过的习题)	1 (10.0%)	7 (23.3%)
实际操作性的习题(让学生以试验的方法完成解答)	2 (20.0%)	0 (0%)
提出解决方案的习题(以所学知识为基础设计方案)	2 (20.0%)	0 (0%)
作图(表)题(作树形图,把可能结果列表)	0 (0%)	5 (16.7%)
总计	10	30

从表7可以看出:新加坡教材水平4的习题总量远远多于我国。在习题类型上,新加坡教材主要集中在探究性习题和非常规习题上,其探究性习题占水平4习题总量的60.0%,非常规习题占23.3%。我国探究性习题占50.0%,比新加坡少10.0%,而非常规习题只占10.0%,比新加坡少13.3%。

新加坡教材中设置的探究性习题注重培养学生的探索能力,例如,有这样一些外表相同的钱包,其中有2个每个中有50分,有9个每个中有20分,有14个每个中有5分,计算:如果随机地抽取3个钱包,加起来的钱数是60分的概率。这是一个真实情境中的问题,需要学生正确地对现实

中的问题进行抽象,即,计算从以上的数中任选3个数,加起来是60的概率.这一问题学生之前并没有接触过,所以没有现成的解决方案,需要学生自己寻找解决方法.因为问题涉及3个因素(任选3个数),应画树形图.在画树形图时,学生需结合现实问题,分析题目是有放回还是无放回,并准确计算每个因素的概率,最后得出结果.解决这一题目需要学生正确地抽象,合理地选择解决方法,结合现实问题分析题目并得出结果,要求学生具备高层次的认知水平.新加坡教材还设置了较多的非常规习题,如,袋子中有15个球,其中有 $x$ 个是红色的.写出从袋子中随机取出一个球是红球的概率的表达式.如果再往袋子里加5个红球,概率变成 $\frac{3}{4}$ ,计算 $x$ 的值.这道习题与例题相比,形式上变化较大,

例题都是由已知条件求概率值,而习题给了概率值求增加的红球个数.这就需要学生分析题目,发现与例题之间的相同之处,进而寻求解决方案.这一习题还需要学生联系之前学过的解方程的相关知识才能解决.所需要的思维水平和认知水平较高,有助于培养学生解决非常规问题的能力.

此外,新加坡教材中的作图(表)题占16.7%,而我国教材中没有这类题目.新加坡教材中的作图(表)题主要集中在概率图和树形图两部分内容,此类题目需要学生分析题目条件,列出适当的概率表和树形图.在计算概率时,用树形图和列表法可以不重复不遗漏地列出所有可能的结果,所以这种重要的方法在习题中应予以强化.我国教材中有两种题型是新加坡教材所没有的:实际操作性的习题和提出解决方案的习题,各占20.0%.

### 3 结 论

通过以上两国教材的比较,可以得出以下结论:

(1)我国教材概率内容习题突出层次性,既有以复习巩固相应小节的教学内容为主、供课堂教学用的练习题,也有供课内、外作业选用的习题和供每章复习时使用的复习题.而新加坡教材却没有较低层次的练习题,只有习题和复

习题.与新加坡相比,我国教材中概率内容习题总量少,特别是高认知水平的习题少.

(2)从习题的数学认知水平上看,两国教材相差较大.尤其是水平2的习题,我国教材明显多于新加坡.水平2的习题主要考察学生对课本中数学事实或术语、基本概念的理解.我国教材对随机事件、必然发生事件和不可能发生事件、可能性等重要概念在练习题和习题中都安排了较多习题,同时也对频率的计算给予了一定的重视,这充分体现了我国对基本概念的重视.

(3)新加坡教材较高认知水平(水平3和水平4)的习题多于我国.水平1和水平2的习题只要求学生掌握基本的概念和计算,而水平3和水平4的习题要求学生在此基础上解决某些具体问题.尤其是水平4的习题,学生需要处理的是复杂情境中有多种因素缠绕的问题,不仅有数学内部的,也有真实情境的.因此,水平3和水平4的习题所培养的是学生的高水平数学能力,是能迁移到很多学科的一种能力,是影响更高端的学科发展、国家地位提高、社会进步的一种创新能力.这表明,与我国相比新加坡更重视较高数学认知水平的培养.

(4)两国教材中较高认知水平题目的倾向性也有所不同.对于水平3的概率题目,我国教材注重学生在解题中联系生活常识,而新加坡教材注重联系概率内容以外的数学知识.对于水平4的概率题目,新加坡教材重视探究性习题和非常规习题.而我国教材中设置了实际操作性的习题和提出解决方案的习题,新加坡教材却没有,这是我国教材的一个进步,但是该类题目的数量还不够.

我国教材应该结合“概率”内容的特点,在保持层次性、重基础、联系生活等特色的同时,学习借鉴新加坡教材习题重视较高数学认知水平的培养,重视概率内容与其他数学领域内容联系的做法,设置多样化的习题,以激发学生数学学习的热情.

### [参 考 文 献]

- [1] 中华人民共和国教育部. 全日制义务教育数学课程标准(实验)[M]. 北京:人民教育出版社,2001.
- [2] Prof Lee Peng Yee. New Syllabus Mathematics 4[M]. Singapore: Utopia Press Pte Ltd, 2001.
- [3] 义务教育课程标准实验教科书数学九年级(上册)[M]. 北京:人民教育出版社,2005.
- [4] 高文君,鲍建生.中美教材习题的数学认知水平比较[J].数学教育学报,2009,18(4):57-61.
- [5] 沈兰,郑润洲.变革的见证:顾泠沅与青浦教学实验年[M].上海:上海教育出版社,2008.

### Comparison on Probability Exercises in Mathematics Textbooks for Junior Middle School between China and Singapore

LV Shi-hu, SUN Xue-min

(School of Education, Northwest Normal University, Gansu Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** From two dimensions of the number and the mathematics cognitive level of exercises, we compare and analyze different types of probability exercises in mathematics textbooks for junior middle school between China and Singapore. We found that the total of exercises in textbook of China is less than Singapore's, but the textbook of China outstands different arrangement levels in schedule of exercises, the total of exercises of high cognitive level in textbook of China is less than Singapore's, the textbook of China gives full attention to basic conception, but the textbook of Singapore pays more attention to developing student's high mathematics cognitive level.

**Key words:** textbook; comparison; exercises; cognitive levels

[责任编辑:陈隼]